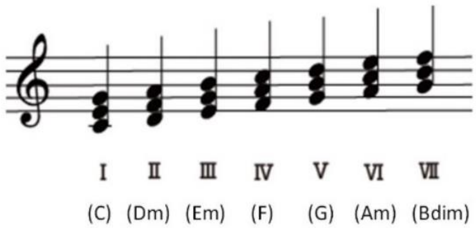
付録 1

和音

和音とは複数の音を同時に鳴らし協和する組み合わせのことです。旋律は 1 つの音だけで構成されていますが、旋律の伴奏は和音ですることが多いです。和音を理論的に研究したのはラモー（J-P. Rameau, 1683～1764）がはじめてといわれています。彼は、機能和声学という概念を作曲に持ち込み、旋律と和声の関係を理論化しました。しかし、その理論が余りにも難しかったため、フランスの物理学者、ダランベール （J. L. R. d'Alembert, 1717～1783）が、ラモーの和声理論を分かりやすく解説した本を 1752 年、その改訂版を 1762 年に出しました（ダランベール、2013)。この本は、ドイツ語や英語に訳され、ドイツやイギリスの音楽界に大きな影響を与えました（Christensen 1993; 片山ら 2009)。



付録1 図1 三和音の基礎

1 3 和音の協和

付録 1 図 1 に 3 つの音の和音の作り方を書きました。これは、ピアノの白い鍵盤をひとつ飛ばしに弾いて作ったものです。

ド・ミ・ソが和音として成立するのは 1 章で述べた通りです。弦を使っている限り、ドの音を鳴らすとその倍音にソ（3 倍音）とミ（5 倍音）が出てくることを利用しています。つまり五線譜で書くと、音階をひとつ飛ばしに重ねるとよい響きがする、あるいは協和することを経験的に人々は知っていました。そこでこの原理を順にそれより高い音階に応用してみました。この“してみました”というところが、和声学の理

論が完全でないところです。そこには理屈があったわけでなく、ピアノでひとつ飛ばしに音を重ねると何となくよい和音がその中にできた、という経験に基づいて和声学ができたのではないでしょうか。

さて付録 1 図 1 を見てください。ひとつ飛ばしの原理を当てはめ、ドを最低音とするとドミソの和音ができます。レを最低音にすると「レ・ファ・ラ」、ミを最低音にすると「ミ・ソ・シ」という具合に順に 3 和音ができていきます。

ドとレ、あるいはレとミのように隣の鍵盤を重ねる和音がないのは、ドとレを一緒に鳴らしても協和しているようには聞こえないからです。また、ミとファを同時に鳴らしても協和しているように聞こえません。これを不協和といいます。だからひとつ飛ばしに音を重ねることにしたのだと思います。図 1 に戻りますが、ド・ミ・ソの和音にローマ数字 I を当てます。これを I の和音と呼び、その上に順にローマ数字を振ると VII まで番号が付きます。VIII は I の和音の 1 オクターブ上になりますので元に戻って I とします。

これらの和音が本当によく協和しているかを表を使って説明します（付録 1 表 1)。2 つ表があり、上の表は平均律の音階を使った場合の 3 和音の協和、下の表は純正律を使った場合です。

上は平均律の音階を使った 3 和音の表です。一番左の列は、音階名（ド、レ、ミ…）を、そのすぐ右隣の列にそれらの平均律での音階比をドを 1.00 としたときの比で記しています。 I の和音のドに対するミ、ソの比は、平均律では 1.26、1.50 です。下の表の純正律ではこの比は 1.25、1.50 となります。そこで、純正律ではドの 6 倍音（6.000）とミの 4 倍音（1.250×4＝6.000)、ドの 3 倍音（3.000）とソの 2 倍音（1.5×2＝3.000) がぴったりと合います。平均律ではこのド・ミ・ソの 3 つの音は“大体”合います。

平均律で調律したピアノでは、ミは 1.26 ですのでこの 4 倍音は 5.04 となり、ぴったりドの 5 倍音の 5.00 にはなりません。また、ソに関しても本当はドの 1.498 倍なので、2 倍してもちょうど 3.000 にはなりません。これが、平均律よりも純正律が和音がよく協和するといわれている理由です。

平均律(ハ長調)		和音の番号						
音階名	比率	I	II	III	IV	V	VI	VII
ド	1.00	1.00						
レ	1.12		1.00					
ミ	1.26	1.26		1.00				
ファ	1.34		1.19		1.00			
ソ	1.50	1.50		1.19		1.00		
ラ	1.68		1.50		1.26		1.00	
シ	1.89			1.50		1.26		1.00
ド	2.00				1.50		1.19	
レ	2.25					1.50		1.19
ミ	2.52						1.50	
ファ	2.67							1.41

純正律(ハ長調)		和音の番号						
音階名	比率	I	II	III	IV	V	VI	VII
ド	1.00	1.00						
レ	1.13		1.00					
ミ	1.25	1.25		1.00				
ファ	1.33		1.19		1.00			
ソ	1.50	1.50		1.20		1.00		
ラ	1.67		1.48		1.25		1.00	
シ	1.88			1.50		1.25		1.00
ド	2.00				1.50		1.20	
レ	2.25					1.50		1.20
ミ	2.50						1.50	
ファ	2.67							1.42

付録1　表1　ハ長調の3和音の比率（上段平均律、下段純正律）
昔の和音の作り方は、ピアノの白い鍵盤を一つ飛ばしに3つ押さえて作りました。例えば、ド・ミ・ソです。平均律でも、純正律でも、3つの音の間隔が同じなのは、和音番号I、IV、Vです。1970年代のフォークソングは、ほとんどこの3つの和音（ギターのコードで書くと、C、F、G）で伴奏された。

和音を構成する 3 つの音が I と全く同じ比の 3 和音は､他に IV と V しか見られません（黄色）。これら I、IV、V の 3 つの 3 和音はギターのコードでいうと、C、F、G です。I の和音と同じ間隔で 3 つの音が IV と V でも並んでいます。これら I、IV、V の和音を和声学では長 3 和音といいます。長調は明るい響きがするのですが、なぜ人が明るく感じるのかはまだわかっていません。

一方、II の和音はレを 1.00 としてファ、ラの比を示しています（緑色)。それらは、平均律でいうと 1.19、1.50 となります。II、III、VI はその比が I、IV、V とは異なり、平均律では、すべて 1.19、1.50 です。これらは暗い、悲しい響きがするので短 3 和音と呼ばれています。純正律では和音の音の組み合わせが II では 1.19、1.48 なのに、III と VI では 1.20 と 1.50 です。全音間隔を 2 種類持つ純正律の弱点のひとつです。

一方、平均律で見ると、I から VI までの和音では、3 和音の 1 番目と 3 番目の音の

長3和音				短3和音					減3和音	
音階比率	I	IV	V	音階比率	II	III	VI		音階比率	VII
1.000	ド	ファ	ソ	1.000	レ	ミ	ラ	（ド）	1.000	シ
1.260	ミ	ラ	シ	1.189	ファ	ソ	ド	（ミ♭）	1.189	レ
1.498	ソ	ド	レ	1.498	ラ	シ	ミ	（ソ）	1.414	ファ

付録1表2　7つの３和音の音階比率のまとめ（平均律の場合）
Ⅰ, Ⅳ, Ⅴの和音は長調の和音で、Ⅱ, Ⅲ, Ⅵの和音は短調で使われるます。Ⅶだけそれらとは異なる和音ができます。和声学ではⅠ, Ⅳ, Ⅴは『長3和音』、Ⅱ, Ⅲ, Ⅵの和音は『短3和音』といいます。Ⅶは『減3和音』と別の名前で呼ばれます。長調の和音と短調の和音の違いは2番目の音の高さだけです。長3和音では、1番目の音に対して2番目の音の比率は1.260倍ですが、単3和音では1.189倍です。

比は、すべて 1.50 です。II、III、VI の和音はイ短調の和音です。ギターのコードでいうと、Dm、Em、Am となります。小文字の m は短調（minor）を意味します。長和音でも、短和音でも 1 番目と 3 番目の音の間隔は 1.50 と同じですが、長 3 和音と短 3 和音の違いは、真ん中にある 2 番目の音の位置です。長調では 1.26 倍ですが、短調では、1.19 倍です。1.19 倍の音はもし最低音をドとすれば、ミ♭に当たります。つまり、短 3 和音では第 2 番目の音が長調より約半音下がっていることになります（付録 1 表 2)。

ミ♭は平均律ではドの 1.189 倍の音ですが、純正律では 1.200（＝6／5）の音です。そこで 3 番目の音の高さを純正律に基づいて 1.500 として、その 3 和音の倍音関係を計算すると、付録 1 表 3 のようになります。一致する倍音の値に影をつけました。これを見ると、同じ 3 和音でも、短 3 和音と長 3 和音では一致する倍音の場所や組み合わせが大きく違っています。短 3 和音ではドの 12 倍音までで、36 個の組み合わせのうち 10 個の一致が見られます（表 3)。一方、長 3 和音では 36 個のうち 16 個も一致しています。しかし、短 3 和音では 3 つの音全部が一致するところがあります。すなわちドの 6 倍音（6.000）はミ♭の 5 倍音（6.000)、およびソの 4 倍音（6.000）と一致します。この関係はドの 12 倍音（12.000）でもう一度出現します（ドの 12 倍音、ミ♭の 10 倍音、ソの 8 倍音)。一方、長 3 和音のほうでは一致数は 36 個の組み合わせのうち 16 個と短 3 和音より割合は多いのですが、3 者全部が倍音で同時に一致するところはありません。すべて 2 音のみです。

						倍音列						
短3和音	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ド	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000	11.000	12.000
ミ♭	1.200	2.400	3.600	4.800	6.000	7.200	8.400	9.600	10.800	12.000	13.200	14.400
ソ	1.500	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000	13.500	15.000	16.500	18.000

						倍音列						
長3和音	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ド	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000	11.000	12.000
ミ	1.250	2.500	3.750	5.000	6.250	7.500	8.750	10.000	11.250	12.500	13.750	15.000
ソ	1.500	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000	13.500	15.000	16.500	18.000

付録1表3　短3和音と長3和音の倍音同士の一致を示した図
　音程の比率は純正律に基づいて計算した。短3和音では基音（ド）の12倍音までで10個の一致がみられる。また、ドの6倍音と12倍音は3つの音に共通して現れる。一方、長3和音では基音（ド）の12倍音までに、全部で16個の一致がみられるが、3つの音に共通する倍音は一つもない。全部2つに限られる。この長3和音と短3和音の違いが、脳に喜びと悲しみを生じさせるのであろうか？

また短3和音では、最低音の倍音がそのほかの倍音と一致するのは3の倍数の倍音のみがほかの倍音と協和します（ドの3、6、9、12倍音)。しかし、長3和音では、3の倍数（3、6、12）だけではなく、5の倍数（5、10）でも倍音の一致が見られます。これらの違いが人に短調の和音が悲しく、長調の和音が明るく感じられる、ということと関係があるのかもしれませんが、まだよくわかりません（Ball、2011;Weinberger、2005)。いずれ脳科学が明らかにするでしょう　(Abbott, 2002)。

ところで平均律ではドとソの比は1.498倍ですが、上でも述べたように純正律では正確に1.500倍となります。そこで、純正律を使った時の和音の比の関係をもう一度付録表1の下の表(純正律)で見てみましょう。

Iの和音では、その比は1.00、1.25、1.50と非常にきれいな比になっています。つまりドとミの音階の比は1対1.25、ドとソの比は1対1.5です。純正律だからです。つまり、ドの3倍音でソを、5倍音でミを定めたことに対応しています。この関係はIVの和音でも、Vの和音でも守られています。さて、II、III、VIの和音の場合を見てみましょう。IIIとVIは、同じ比、1.00、1.20、1.50です。ところがIIでは少し異なり、1.000、1.19、1.48です。このような齟齬が純正律の弱点です。

付録1表1の上下の表では、VIIの和音が、他の和音と少し異なることがわかります。平均律では1.000、1.19、1.41という比で、純正律でも、1.000、1.20、1.42です。IからVIの和音までは1番目と3番目の音程の比は例外なく1.5に近い音でしたが、VIIの和音だけ1番目と3番目の音の比が1.5から大きく外れ、平均律では

1.41、純正律でも、1.42 と 1.500 の音に比べて約半音低く外れています。

和声学では I、IV、V は長 3 和音（長調の和音だから長がつきます）といい、II、III、VI は短 3 和音（短調の和音だから短がつきます）といいますが VII だけは減 3 和音といいます。VII の和音だけ、シとファの間に半音が 2 つ入っています。そのほかの 3 和音中には半音は 1 つだけです。長 3 和音は 2 番目と 3 番目の間に、短 3 和音では 1 番目と 2 番目の間に半音がひとつ入ります。いずれにしても 3 和音を作るときに協和を考えずに、五線譜の位置、あるいはピアノなどの鍵盤の位置に従い機械的に 3 つの音を重ねたために和声学が複雑になったのかもしれません。

２　倍音から和音を作る

それでは、倍音が協和の原因なら、弦の倍音振動を元に和音が自動的に作れるでしょうか?　付録 1 表 4（ア〜キ）を見てください。
（ア）ではドの音階比を 1.000 にして、それぞれの音階の倍音列と 8 倍音まで書き出しています。通常は音楽では音の間隔を示すのにセントという単位を使い、1 オクターブを 1200 セントとして表示し、半音の間は 100 セントとします。この方法では、和音の協和を数字で比較することができません。そこで本書ではこれまでどおり、ドを基準（1.000）にし、それ以外の音を比で表します。整数倍音ですから、ドの 2 倍音は 2.000、3 倍音は 3.000 になります。このドの倍音列は、いろいろな別の音階の倍音と協和します。表 4 では整数倍音を 8 倍音まで計算しました。

付録 1 表 4 の（ア）を見て下さい。これまで何度も出てきましたが、ドの 3 倍音はソの 2 倍音と、またドの 5 倍音はミの 4 倍音と協和します。ドの 3 倍音はちょうど 3.000 ですが、ソの 2 倍音は平均律では 2.997 となり、正確に 3.000 ではありません。しかしその差を％で表すと 0.1％です。この差は半音の 1／4 を聞き分けられるというモーツアルトでもおそらく分かりません。そこで半音の 1／4 以内（1.49％以内）の 2 つの音は協和していると本書では判定します。

付録 1 表 4（ア）の最初のドの行をさらに右に見ていくと、ドの 5 倍音はミの 4 倍

音だけでなく、ラの 3 倍音とも協和します。ラの 3 倍音は正確に 5.000 ではなく、5.045 です。その差は 0.9%なので、上に述べた判定基準内なので、協和しているとみなします。ドの 4 倍音はファの 3 倍音（4.005 差 0.125%）と協和します。ドの 6 倍音はもう一度、ソの 4 倍音と協和します。ドの 7 倍音に協和するものは何処にもありません。ドの 8 倍音はファの 6 倍音と協和します。このようにドがどの音階の倍音と協和するかを右の最後の列にまとめました。ドの倍音は、ミ、ファ、ソ、ラの倍音とどこかで協和します。

同じことをレでも考えて見ましょう。それが付録 1 表 4（イ）の表です。レの 3 倍音はラの 2 倍音と、レの 4 倍音はソの 3 倍音と、5 倍音はシの 3 倍音と、8 倍音はソの 6 倍音と協和します。右の列にまとめると、レの倍音はファ、ソ、ラ、シ、と協和します。このような表をミ［表 4 (ウ)］、ファ［同 (エ)］、ソ［同 (オ)］、ラ［同 (カ)］、シ［同（キ)］まで作りました。

（ア）

ハ長調(平均律)		整数倍音							ドと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
ド	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	ド
レ	1.122	2.245	3.367	4.490	5.612	6.735	7.857	8.980	
ミ	1.260	2.520	3.780	5.040	6.300	7.560	8.819	10.079	*ミ
ファ	1.335	2.670	4.005	5.339	6.674	8.009	9.344	10.679	*ファ
ソ	1.498	2.997	4.495	5.993	7.492	8.990	10.488	11.986	*ソ
ラ	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	*ラ
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	

（イ）

ハ長調(平均律)		整数倍音							レと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
レ	1.122	2.245	3.367	4.490	5.612	6.735	7.857	8.980	レ
ミ	1.260	2.520	3.780	5.040	6.300	7.560	8.819	10.079	
ファ	1.335	2.670	4.005	5.339	6.674	8.009	9.344	10.679	*ファ
ソ	1.498	2.997	4.495	5.993	7.492	8.990	10.488	11.986	*ソ
ラ	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	*ラ
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	*シ
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	
レ	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	

（ウ）

ハ長調(平均律)		整数倍音							ミと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
ミ	1.260	2.520	3.780	5.040	6.300	7.560	8.819	10.079	ミ
ファ	1.335	2.670	4.005	5.339	6.674	8.009	9.344	10.679	
ソ	1.498	2.997	4.495	5.993	7.492	8.990	10.488	11.986	*ソ
ラ	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	*ラ
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	*シ
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	*ド
レ	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	
ミ	2.520	5.040	7.560	10.079	12.599	15.119	17.639	20.159	

（エ）

ハ長調(平均律)		整数倍音							ファと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
ファ	1.335	2.670	4.005	5.339	6.674	8.009	9.344	10.679	ファ
ソ	1.498	2.997	4.495	5.993	7.492	8.990	10.488	11.986	
ラ	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	*ラ
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	*シ
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	*ド
レ	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	*レ
ミ	2.520	5.040	7.560	10.079	12.599	15.119	17.639	20.159	
ファ	2.670	5.339	8.009	10.679	13.348	16.018	18.688	21.357	

（オ）

ハ長調(平均律)		整数倍音							ソと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
ソ	1.498	2.997	4.495	5.993	7.492	8.990	10.488	11.986	ソ
ラ	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	*シ
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	*ド
レ	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	*レ
ミ	2.520	5.040	7.560	10.079	12.599	15.119	17.639	20.159	*ミ
ファ	2.670	5.339	8.009	10.679	13.348	16.018	18.688	21.357	
ソ	2.997	5.993	8.990	11.986	14.983	17.980	20.976	23.973	

（カ）

ハ長調(平均律)		整数倍音							ラと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
ラ	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	ラ
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	*ド
レ	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	*レ
ミ	2.520	5.040	7.560	10.079	12.599	15.119	17.639	20.159	*ミ
ファ	2.670	5.339	8.009	10.679	13.348	16.018	18.688	21.357	*ファ
ソ	2.997	5.993	8.990	11.986	14.983	17.980	20.976	23.973	
ラ	3.364	6.727	10.091	13.454	16.818	20.182	23.545	26.909	

（キ）

ハ長調(平均律)		整数倍音							シと協和
音階名	音階比率	2	3	4	5	6	7	8	する音階
シ	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	シ
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	
レ	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	*レ
ミ	2.520	5.040	7.560	10.079	12.599	15.119	17.639	20.159	*ミ
ファ	2.670	5.339	8.009	10.679	13.348	16.018	18.688	21.357	*ファ
ソ	2.997	5.993	8.990	11.986	14.983	17.980	20.976	23.973	*ソ
ラ	3.364	6.727	10.091	13.454	16.818	20.182	23.545	26.909	
シ	3.775	7.551	11.326	15.102	18.877	22.653	26.428	30.204	

付録1表4　各音階の倍音の関係
ド、レ、ミなど各音階を基準に表を作った。基準となる音階名の倍音と協和する倍音を持つ音階名を右の列にまとめた。両者が少し異なる数字も一致すると判定している場合は、両者の間の違いは1.4865%以下であることを判定基準としている。各音階はすぐ下と上の音階以外と協和することがわかる。

音階名	倍音が協和する音階名	協和しない音階名	作れる和音	和音番号
ド	ミ、ファ、ソ、ラ	レ、シ	ドミソ、ドミラ、ドファラ	Ⅰ、Ⅵ、Ⅳ
レ	ファ、ソ、ラ、シ	ミ、ド	レファラ、レファシ、レソシ	Ⅱ、Ⅶ、Ⅴ
ミ	ソ、ラ、シ、ド	ファ、レ	ミソシ、ミソド、ミラド	Ⅲ、Ⅰ、Ⅵ
ファ	ラ、シ、ド、レ	ソ、ミ	ファラド、ファラレ、ファシレ	Ⅳ、Ⅱ、Ⅶ
ソ	シ、ド、レ、ミ	ラ、ファ	ソシレ、ソシミ、ソドミ	Ⅴ、Ⅲ、Ⅰ
ラ	ド、レ、ミ、ファ	シ、ソ	ラドミ、ラドファ、ラレファ	Ⅵ、Ⅳ、Ⅱ
シ	レ、ミ、ファ、ソ	ド、ラ	シレファ、シレソ、シミソ	Ⅶ、Ⅴ、Ⅲ

付録1表5　倍音の協和から導いた和音の種類
　音階名ドの場合その倍音が協和する音階名はミ、ファ、ソ、ラの4つで、レとシは協和しない。そこでこの組み合わせで3和音を作ることを考えると、ドミファとかドファソも考えられるが、ミはファと協和しないまたファはソと協和しないので、結局作れる3和音は、ドミソ、ドミラ, ドファラの3種類に限定される。ドミラはラドミと同じ、同様にドファラもファラドとおなじ組み合わせである。この組み合わせで和音番号を考えるとすべての和音番号が3回ずつ出てくる。

それぞれの表の右の列にまとめた協和する音階をさらに抜き出してまとめたのが付録 1 表 5 です。

　ドは内包するどれかの倍音が、ミ、ファ、ソ、ラのどれかの倍音とあいます。ドは、すぐ隣のレとシには協和しません。そこでこの組み合わせで無理に 3 和音を作ろうとすると、ド<u>ミファ</u>、ド<u>ファソ</u>、ド<u>ソラ</u>などができます。ところが、ミはすぐ隣のファとは協和しません。ファはすぐ隣のミ、ソとは協和しませんので、結局ドと 3 和音が作れるのは、ドミソ、ドミラ、ドファラの 3 種類の 3 和音しかできません。これらを「作れる和音」の列に掲げました。最後にその「和音番号」を書き出しました。

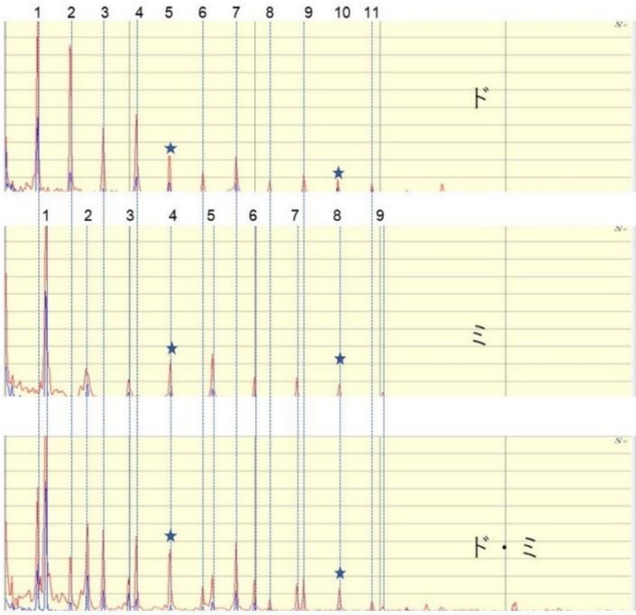
　この最後の「和音番号」を見ると、付録 1 図 1 で示した和音がすべて出てくることがわかります。つまり、和声学の基本の 3 和音はすべて弦の整数倍音の協和という考え方で説明できます。

3　目で見る和音

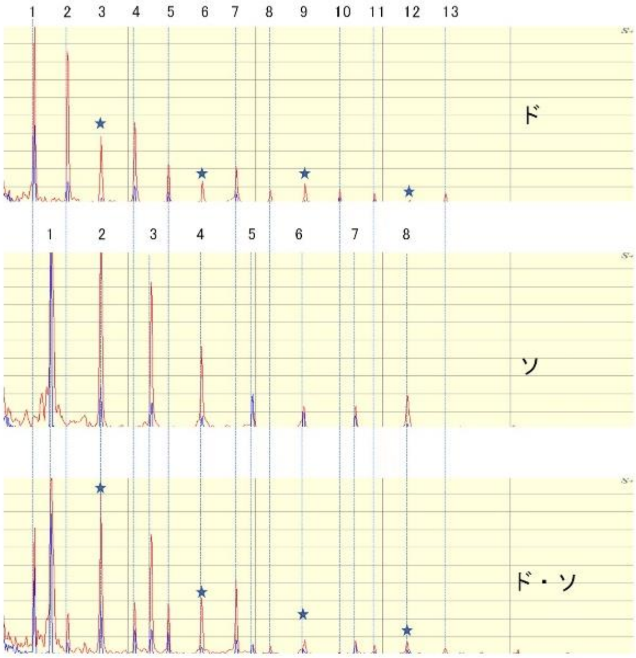
　第 1 章の図 1－5 では、ピアノの一音のフーリエスペクトルをお見せしました。それでは、2 音を同時にピアノで弾くとどうなるのでしょうか? 付録 1 図 2 を見てください。ド（図 2 上）とミ（中図）別々に弾いたときと、同時に弾いたとき（下図）のスペクトルを３つ示しました。ドの基音の振動数は 261.6 Hz、ミの基音の振動数は 329.6 Hz です。それぞれに 10 以上の倍音のピークが出ていることが分かります。ド

とミを同時に弾くとそれらのピークが重なっています（付録図 2 下図)。ドとミのピークにそれぞれ破線をつけて下の図の 2 音を同時に弾いたときのピークとの対応を示しました。これを見ると、星印を付けたどの 5 倍音と 10 倍音はミの 4 と 8 倍音に重なっています。

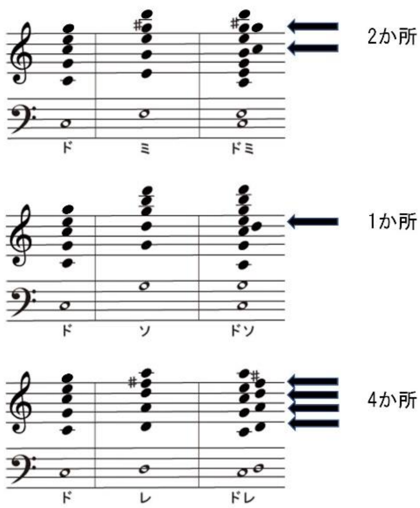
ドとソを弾くと付録 1 図 3 のようになります。今度は、ドの 3、6、9、12 倍音がソの 2、4、6、8 倍音と一致しています。一致するピークに星印をつけました。ミのときより、ソの音を同時に弾いたほうが倍音の一致の数が多くなっています。これも五線譜に書くと付録 1 図 4 のようになります。ソは、6 倍音まで書くとソ・ソ・レ・ソ・シ・レとなります。　そこで、ドとソを同時に弾くと唯一不協和になりそうなところは、ドの 4 倍音（C5）とソの 3 倍音のレと近いところの 1 か所だけです。ド、ミの場合は 2 か所です。ところが、ドとレでは 4 か所です。



付録1図2　ドとミを別々に弾いたときと同時に弾いたときのスペクトル。
縦軸は音の強度。数字はピークの番号でもありまた倍音列の番号も示す。
ドのピークにつけた星印は、ミのピークと一致するもの



付録1図3　ドとソを別々に弾いたときと、同時に弾いたときのスペクトル
　縦軸は音の強度。数字はピークの番号でもありまた倍音列の番号も示す。
ドのピークにつけた星印は、ソのピークと一致するもの



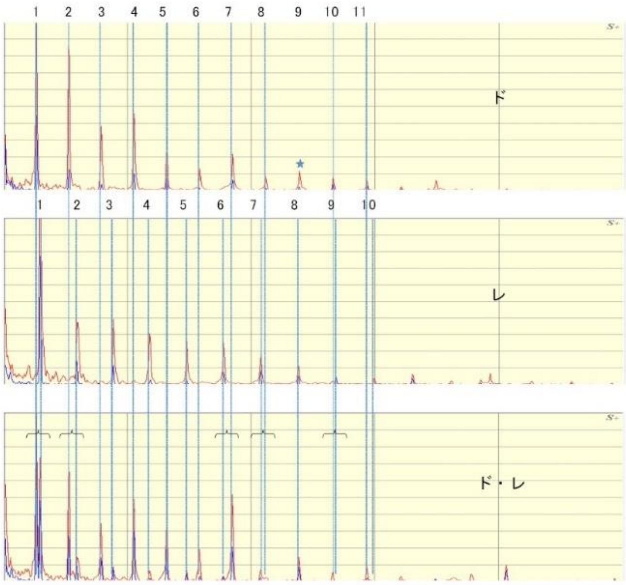
付録1図４　五線譜上で表したド、レ、ミ、ソの倍音を含めた協和の例
　ドとミあるいはドとソではその倍音を重ねても倍音列同士は余り重ならないが、ドとレでは多くが重なる。

最後に、私たちには不協和に聞こえるドとレを弾いたときの様子を、スペクトルでなく、五線譜の上で説明しましょう。付録 1 図 4 を見て下さい。まずドを C3 から始めます。基音は全音符で書きました。倍音列は四分音符で書いています。6 倍音まで書きました。ドとミは 6 倍音までに 2 か所半もしくは全音の関係があります。ドとソは 1 か所です。ところがドとレは半音が 4 か

所もあります。

ドとレの関係のスペクトルを付録 1 図 5 に示しました。ドとレの間隔は狭いことが分かります。倍音の一致を見ても一致するのはドの 9 倍音がレの 8 倍音に一致する 1 か所のみです。不協和は、2 音が近づいているときに大きくなります。半音あるいは、全音あいている 2 音がそれに当たります。最初の基音同士であるドとレも不協和を与えますし、その 2 倍音のドとレも不協和です。さらに 3 倍音のソとラ、4 倍音のドとレ、また 5 倍音のミとファ#、6 倍音のソとラも不協和です。つまり、どの 6 倍までの倍音列をとっても不協和ばかりとなります。

この付録 1 図 2〜5 は、ドがミやソと協和し、レと協和しないことの原因を示していると考えられます。また、特に付録 1 図 3 をみると、ソの倍音はどれもドの倍音列のちょうど真ん中に位置するか、一致するかになっており、ドの倍音のピークのそばには近づいていません。しかし、レの場合はレの基音、2 倍音および 7、9 倍音はドの



付録1　図5　隣り合うドとレを別々及び同時に弾いた時のスペクトル
　縦軸は音の強度、横軸は音の高さ。数字はピークの番号。ドの9倍音がレの8倍音と唯一合うので星印を付けた。　で示したところはドの倍音とレの倍音が近いところ。

倍音列に非常に近いけれど一致していません。この倍音列の位置関係も、協和の度合いに大きな影響を与えているようです。このことを数字で表せることに気づいたのがヘルムホルツです。彼は不快さを不協和度という概念で数値化しました。

しかし、もともとドレミの音階は互いに協和する音階として決定されたはずです。ドとレが合わないと簡単に言っていいのでしょうか？　隣同士では近すぎて合いませんが、ドと 1 オクターブ上のレとは合います。シも隣のドとは合いませんが、1 オクターブ上のシは下のドと合います。

参考文献

ジャン・ル・ロル・ダランベール（2013)「ラモー氏の原理に基づく音楽理論と実践の基礎」、（片山千佳子・安川智子・関本菜穂子訳、春秋社）

片山千佳子・関本菜穂子・安川智子（2009）ダランベール著『ラモー氏による理論的・実践的音楽の基礎原理』に関する考察、東京藝術大学音楽部　紀要　34：17-38.

Abbott, A.（2002） Neurobiology; Music, maestro, please!, Nature 46:12-14.

Ball, P.（2010）　音楽の科学ー音楽の何に魅せられるのか？ー（夏目大訳）河出書房

Chrtistensen, T.（1993）　Rameau and Musical Thought in the Enlightenment, Cambridge Studies in Music Theory and Analysis.

Weinberger, N. M.（2005）脳を揺さぶる音楽、日経サイエンス 2005 年 3 月号.

付録 2

円盤ポリゴノーラの振動様式

下の表 1 に周辺自由振動の円盤の振動様式と出る音の高さの理論値を比で示しました。

これは円盤のすべての振動の様子をもとに、完全に理論からでる数字です。この表は（0　1）の振動様式から出る音の高さ（振動数）を 1.000 としたときの、ほかの振動様式から出てくる音（振動数）を比で示しています。

1 次元の弦の振動は簡単に目で確認することもできますが、2 次元の面の振動を目で見るには少し工夫が必要です。しかし、弦と同じように、2 次元の物体もたたくと、その平面から、いろいろな音が同時に出ていることは同じです。しかも、その比は非整数です。

	ドーナツ節線										
ピザ節線	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 9	m = 10
n = 0	—	1.000	4.231	9.642	17.222	26.969	38.883	52.963	69.210	87.623	108.203
n = 1	—	2.216	6.545	13.043	21.708	32.540	45.537	60.702	78.032	97.529	119.193
n = 2	0.779	3.726	9.159	16.750	26.503	38.421	52.505	68.754	87.169	107.751	130.498
n = 3	1.499	5.514	12.069	20.760	31.606	44.613	59.784	77.120	96.621	118.287	142.119
n = 4	2.437	7.574	15.270	25.069	37.013	51.113	67.374	85.797	106.385	129.137	154.055
n = 5	3.594	9.899	18.757	29.675	42.722	57.918	75.272	94.785	116.461	140.301	166.305
n = 6	4.969	12.487	22.525	34.572	48.730	65.027	83.475	104.081	126.847	151.776	178.867
n = 7	6.564	15.334	26.572	39.759	55.033	72.435	91.983	113.683	137.542	163.560	191.741
n = 8	8.377	18.437	30.894	45.231	61.629	80.142	100.792	123.590	148.543	175.654	204.925
n = 9	10.410	21.795	35.488	50.987	68.516	88.144	109.901	133.800	159.849	188.054	218.417

付録2　表1　周辺が固定されていない円盤の共鳴振動数の理論比率
　ｎはピザモードの接戦の数、ｍはドーナツモードの輪線の数を表す。ｎ＝0、ｍ＝1の値を1.000とした場合のそのほかの振動比率を示している。

本書の図3−4で、出てくるピークを例に説明します。円盤の中心をたたくと一番低い音は248 Hzの音です。これを基音とします。その上にある非整数倍音の主要なピークは1035、1609、2270、2348 Hzです。これらのピークの振動数と基音の振動数の比を計算し、理論値と比べると表2のようになります。

付録2　表2　円盤振動数の実測値と計算値

実測値（Hz）	実測値（比）	計算値（比）	様式（n　m）
248	1.000	1.000	(0　1)
1035	4.173	4.231	(0　2)
1609	6.488	6.545	(1　2)
2270	9.153	9.159	(2　2)
2348	9.468	9.642	(0　3)
3174	12.798	12.069	(3　2)
3784	15.258	15.270	(4　2)
4176	16.839	17.222	(0　4)

1035 Hzの音は基音248 Hzの4.173倍で、表3−2に示した（0　2）様式の理論値の4.231と近く、1035 Hzの振動は（0　2）の様式で振動していることが推定されます。実際、円盤に1035 Hzの振動を与えクラドニの図形を描かせると（0　2）様式の模様（円の節が2つ）が現れます。上で推定された様式はすべて観察された振動数を円盤に与えてクラドニ図形を描かせると、予想どおりになりました。理論値と観測値が近いことから、円盤の振動様式が科学的に完全に理解できている証拠となります。

ポリゴノーラの中心をたたいた時の様式を表にまとめました[付録2　表3（左)]。

付録2　表3 円盤のポリゴノーラの中心と橋をたたいた時に出る振動様式の違い

中心をたたいた時

..	0	1	2	3	4
0		0 1	0 2	0 3	0 4
1			1 2		
2			2 2		
3			3 2		
4			4 2		
5					
6					
7					
8					

端をたたいた時

..	0	1	2	3
0		0 1	0 2	0 3
1		1 1	1 2	1 3
2	2 0	2 1	2 2	2 3
3	3 0	3 1	3 2	
4	4 0	4 1	4 2	
5	5 0	5 1	5 2	
6	6 0	6 1	6 2	
7	7 0	7 1		
8	8 0	8 1		

つまり、248、1035、2348、4176 Hz の音は、様式で言うと（0　1）、（0　2）、（0　3）、（0　4）です。円の節が、「1、2、3、4 本」とでる様式で、ピザ線がほとんど現れません。ドーナツ様式の振動が多く見られる音がします。これは円盤の中心をたたいたからです。

しかし、中心から 3／4 のところをたたくと、また違った音が出ます（付録 2　表 3、右）。ドーナツが 0 個の振動（n　0）がたくさんでています。左の表と比べると、縦の列が長くなっていることでわかります。これは、ピザの線がたくさん出ていることにほかなりません。中心をたたくとドーナツ主流の音色が、中心から 3／4 のところをたたくとピザ主流の音が出ます。

もう一度、中心をたたいたときにこの円盤が出す音を表 2 で見てみます。248 Hz を基音として、4176 Hz まで出ています。248 Hz とは平均律で言うとシに当たります。1035 Hz は 2 オクターブ上のド、1609 Hz はソ、2270 Hz と 2348 Hz は両方ともレに相当します。もしこの音をピアノで弾くと非常に不協和な音がします。ところが円盤で聞くと、各倍音は互いに全く不協和ではありません。整数倍音を出すピアノでは不協和な音の組み合わせが、円盤なら協和する音になります。

付録 3

不協和度曲線

1　ヘルムホルツの発明と洞察

付録 1 で説明しましたように、2 つ以上の音が協和するかどうかは、ある音が発生する倍音列が別の音の発生する倍音列と、どれだけ一致するかで決まりそうです。これに最初に気づいたのは、ヘルマン・L・F・ヘルムホルツ（H. L. F. Helmholtz, 1821～1894）であると思われます。彼が調べた倍音列は、整数倍です。1 次元の弦の整数倍音を基礎にしました。

ヘルムホルツは「On the Sensations of Tone (1885)」という本の最初にまず、ド（彼は最初のドの基音を 66 Hz にとっています）の基音から 16 倍音までを五線譜に書いています。第 1 章の図 1－6 を再掲しました（付録 3　図 1)。

最初から書き出すと、8 倍音までは

1　2　3　4　5　6　7　　8

ド、ド、ソ、ド、ミ、ソ、シ♭、ド

ところが 9 倍音からは

9　10　　11　　　12　　　13　　14　　15　16

レ、ミ、ファ—ファ#、ソ、　ソ#—ラ、シ♭、シ、ド

となり、あいまいな音程（7, 11, 13, 14 倍音）も含まれます。

付録3　図１　ヘルムホルツの著者に載っている倍音列の五線譜への記載
　66Hzのドから4オクターブ上のドまで記載されている。下の音階名についている星印は平均律と少しずれていることを示す。音符の左についている斜めの棒で、右下がりは音符より少し低い場合、右上がりは音符より少し高いことを示す。

オーストリアの作曲家リヒャルト・シュトラウス(1864～1949)は、1894 年に『ツァラトゥストラはかく語りき』という曲を作りました。この曲の冒頭は上に挙げた「ド・ド・ソ・ド・ミ」の音階から始まります。『ツァラトゥストラはかく語りき』はニーチェの著作であり、「神は死んだ」という思想を語ったものです。私には、リヒャルト・シュトラウスが、「ドレミは死んだ」と言っているように聞こえます。つまり、ドレミを使ってもう曲が書けない、と。

さて、付録 1 で示したように、ドをミやソと同時に弾くとその各倍音のどこかで互いに一致し、倍音列同士があまり近づかないので協和しています。一方、ドとレを同時に弾くと一致する倍音列が 1 か所しかなく、また互いの倍音列がかなり近接するところが何か所も出てきます。ドとド＃ではもっと不快です。

2 つの音が少しだけ離れると唸りが生じて不快度がまし、2 つの音が徐々に離れるにしたがってさらに不快度が上昇するが、ある程度離れると不快度は減少します。

“唸り”とは異なる音の周波数の差で生じるものです。440 Hz と 441 Hz の音を同時に鳴らすと、1 秒間に 1 回の唸りが聞こえます。唸りとは、音が大きくなったり小さくなったりすることです。1 秒間に 1 回これが起こるくらいならまだよいのですが、440 Hz と 445 Hz を同時に鳴らすと、1 秒間に 5 回唸りが聞こえ、頭がおかしくなるほど耳障りに聞こえます。実際にヴァイオリンのような弦楽器で 2 つの音を同時に鳴らすと、いろいろな倍音が発生しています。例えば 440 Hz の基音に対して 880, 1320 Hz などの倍音が同時に発生しています。この音と 445 Hz の音を同時にヴァイオリンで鳴らすと、440 Hz に対する 445 Hz では、毎秒 5 回の唸りが、2 倍音の 880 Hz に対する 890 Hz では毎秒 10 回の、そして 3 倍音の 1320 Hz に対する 1335 Hz では毎秒 15 回の唸りが発生します。つまり、毎秒 5 回、10 回、15 回の唸りが混ざって聞こえ、大変耳障りになります。440 Hz と 460 Hz を同時に鳴らすとまるでサッカーのレフェリーが笛を吹いているようなびりびりした感じがします。ところが、片方が 500 Hz 位まで離れると、少しましになってきます。基音は 440 Hz で、比べる音が 500 Hz なら 1 秒間に実は 60 回の唸りが聞こえているはずなのですが、それがあまり耳障りでなくなってきます。440 Hz と 500 Hz の 2 倍音同士では 880 Hz と 1000 Hz なので、

その差 120 Hz の唸りが聞こえるはずです。3 倍音同士では 1320 Hz と 1500 Hz なので、その差はさらに広がり 180 Hz となります。つまり 440Hz と 500Hz を同時に聞くとまず唸りは、毎秒 60 回の唸りが、それ以上の倍音同士ではその 2 倍（120 回）、3 倍（180 回）の唸りが聞こえているはずですが、もうあまり耳障りではなくなっています。つまり 2 つの音の間隔と人の感じる不快度にはある関係があるらしいのです。

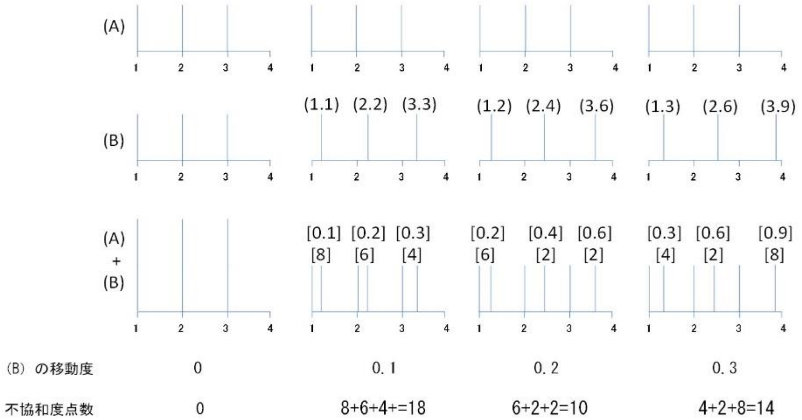
この問題にちゃんと答えたのは、Promp と Levert（1965） です。彼らは多くの研究者が発表した結果を使って 2 つの音で生じる不快度をある関係式にまとめました。不快度を式で表すことに特別の意味があったわけではないのですが、一度この不快度を式で表すことに成功すると、不協和度を数字で評価することができます。この計算は多くの足し算を使うので、人の手で計算するのは大変ですが、現在ではコンピュータにやらせると簡単に済みます。

ヘルムホルツの本では彼は「不協和度を計算してみた」と書いていますが、本当に全部やってみたかどうかはわかりません。しかし、全部計算しなくとも、彼は素晴らしい直観と洞察力でこの計算を行うとどんな結果になるかを見抜いたのでしょう。

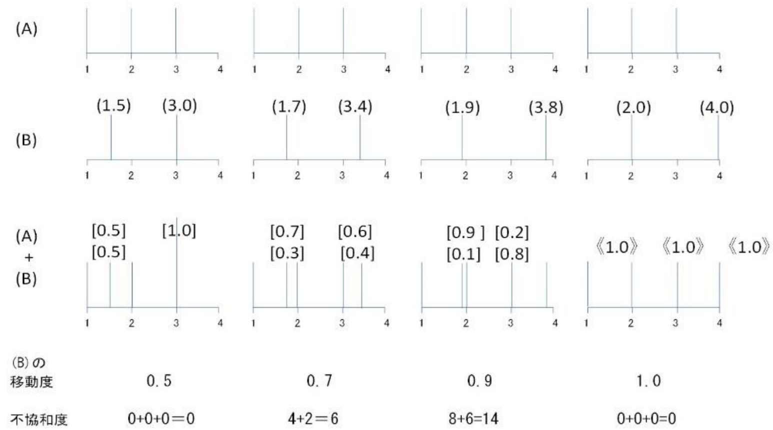
次に不協和度の計算の考え方を説明しましょう。

2　不協和度計算

付録 3 図 2（ア）を見てください。まず 1 つの音（A）を考えます。この音は基音と 2 倍音と 3 倍音だけを倍音列として持っているとします。次に（B）という音を考え、（A）と（B）を同時に鳴らすことを考えます。(A) はずっと固定したままですが、(B) の音は少しずつ上げていくことにします。最初は、2 つの音が全く同じ音程からスタートし、その時の不協和度は 0 とします（図 2)。2 つの音は全く同じ音ですので、1 つの音として聞こえます。



付録3 図2(ア) 2つの音（A）、(B)を同時に鳴らした時の不協和度の計算



付録3 図 2（イ） 2つの音を同時に鳴らした時の不協和度の計算
（ア）では（A）の音を固定したまま、（B）の音を0.1、0.2、0.3つまり10%、20%、30%高く動かしながらその不協和度を計算した。（イ）では（B）の音を（A）よりも50%、70%、90%、そして100%すなわち（A）の1オクターブ上まで動かした。

さて（B）の音を 1 オクターブあげた場合を考えましょう。この場合は図 2（イ）のもっとも右端のグラフに示しました。

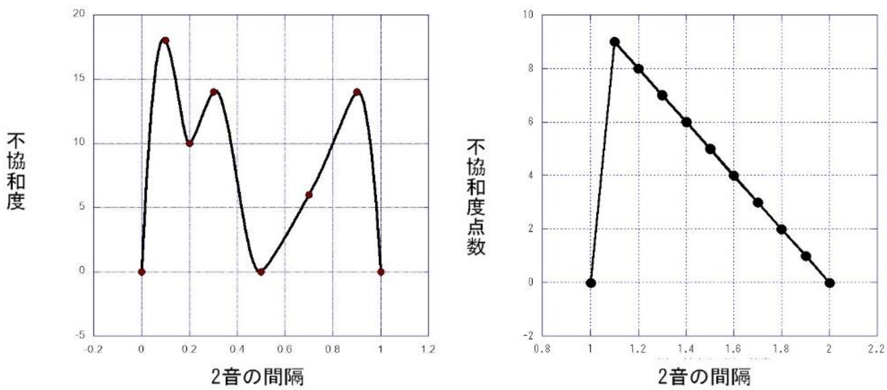
この場合、（A）の 2 倍音と（B）の基音が完全に一致するので唸りが生じません。つまり（A）と（B）の音が同じ整数倍の倍音を持っている場合は（A）と（B）が 1 オクターブ離れると、不協和度は 0 になるのです。しかしその間では不協和度は不思議な動きをします。まず（B）の音が 10%高くなったとします。つまり B の倍音はすべ

て 1.1 倍になります（図 2（ア））。基音が 1.1、2 倍音は 2.2、3 倍音は 3.3 になります。これを同時に鳴らした場合を一番下の列に重ねて並べました。すると、(A）の音の倍音列と、新しい（B）の倍音列が並びます。その間隔は左から 0.1、0.2、0.3 となります。

ここで次のように仮定します。

二つの音が 0.1 で並んでいる場合は大変 2 音が近いので、不協和度を 8 点とし、0.2 なら 6 点，0.3 なら 4 点、0.4 なら 2 点とだんだんと下げ、0.5 以上離れると耳障りではなくなるとして 0 点とします。また、1.0 つまり 1 オクターブ離れると不協和度は 0 点です。A 音と B 音の 2 本の倍音列の間隔に応じて点数が出ますのでそれを全部足します。(B）を（A）に対して 1.1 倍上げた場合、この点数の合計は 18 点になりました。(B）が 1.2 倍になると不協和度は 10 点に、1.3 倍になると 14 点になりました。これを続けていくと図 3 左が得られます。

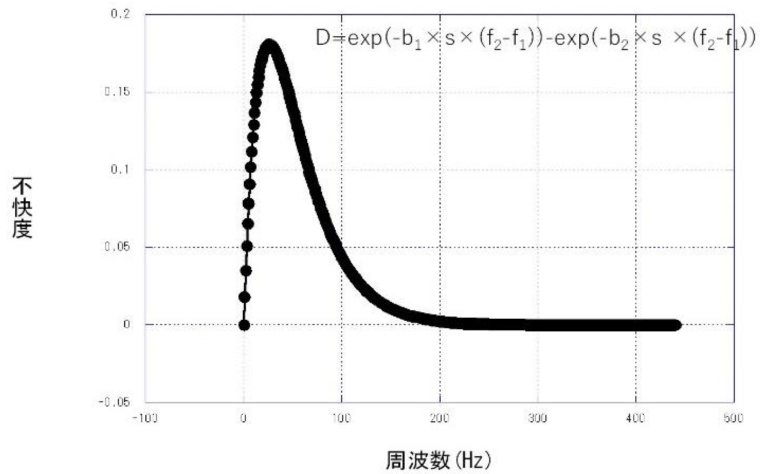
このグラフを書くために仮定した不快度の点数のグラフを下の図 3 右に掲げました。音が 1.1 倍すなわち 10%離れたときに 8 点、1.2 倍すなわち 20%離れたときに 6 点という任意に作った不快度のグラフです。



付録3　図 3　不協和度曲線の例
左図は整数倍音1.2.3を持つ二つの音を同時に鳴らしたときの不協和度曲線。横軸は（B）の音の（A)に対する比率、縦軸は不協和度の強さを表す。
右図は左図の不協和度を計算するために使った不協和の点数を示す仮想的なグラフ。

以上のようにして作った 2 音の間隔と不協和度の関係をグラフにすると図 3 の左が得られます。これを見ると、2 つの音が 0.1 離れると大変不協和度が高くなっています。しかし、(B) の音が (A) の 1.5 倍になった時、不協和度は 0 になります。不協和度が低い、という事は協和度が高いということです。ソ（ドの 1.5 倍の音）の不協和度が低いことがここでも出ています。つまりこの簡単なグラフからでも、ドとソが協和することがわかります。同じ理屈で、2.0 の時にも 0 になっていますが、これは A の 1 オクターブ高いドと B の基音が協和するからです。

付録 3　図 3 では 2 つの音を同時に鳴らした時の不快度を適当に頭で考えて作りましたが、実際に人の耳で聞いた時の不快度を曲線にし、それを数式で表したのが最初に述べた Promp と Levert (1965) です。彼らが作った数式とその曲線を付録 3 図 4 に載せました。



付録3　図4　2つの音を同時に鳴らした時の人の耳に対する不快度を表すグラフと式
D：不快度：b_1, b_2：定数(b_1 =3.5, b_2=5.75)；s=((0.24/(0.021×f_1+19))；f、用いる2つの音の周波数。f_1には440Hzを用いた。グラフはf_1の1オクターブ上の音（880Hz)まで2つ目の音を少しずつ離しながら計算をして描いた。

不協和度は、人間の耳が判断するので、その基本は人の感じ方を数式にすることが基本となります。Prompt と Levelt（1965）は多くの研究者が得た結果をまとめて次のような式を提案しました。

$$d（x）=e^{\{-b_1\times s\times(f_2-f_1)\}}-e^{\{-b_2\times s\times(f_2-f_1)\}}$$

d（x）は不協和度の度合いを示す値です。この式の中にある多くの係数は次のように定義されています。

$b_1=3.5$

$b_2=5.75$

$f_1=$1 番目の音の振動数

$f_2=$2 番目の音の振動数（不協和度を調べたい音）

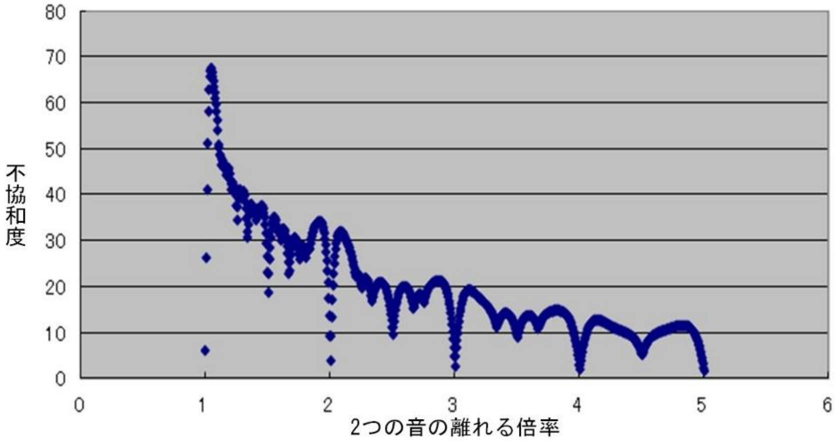
$$s=\frac{x^*}{s_1\times f_1+s_2}$$

ここで、$x^*=0.24$、$s_1=0.0207$、$s_2=18.96$

これら係数に代入されている数字は、人の感覚を心理学的実験を元に決めた数字です。f_1を固定して、f_2をだんだん離していくとｄ（ｘ）の値がどのように変化するかをグラフにすると、不協和度曲線ができます。ただしこの場合、f_1とf_2は両者ともある単一の振動数だけの正弦波で、倍音を一つも持たないことが前提です。

付録 3 図 4 で例示した時に用いた不快度のグラフに比べると式はずいぶん複雑ではありますが、曲線は滑らかになっています。このグラフの作られた原理は図 4 のグラフと一緒で、同時に弾く 2 つの音が少し離れたときが最も不快度が高く、離れるにしたがって不快度は減少し、1 オクターブ離れたところでは、不協和度は 0 に達します。

もし、ひとつの音にたくさんの倍音が同時に含まれているなら、それらも不協和度として足しこまねばなりません。このように、2 つの音がそれぞれ、任意の倍音



付録3　図5　整数倍音を持つ2つの音を同時に鳴らした時の不協和度曲線。横軸の2と4はそれぞれ１オクターブ、2オクターブ上の音を示す。

を持っていても、それを入力すれば、不協和度を自動的に計算してくれるプログラムが提供されています（Sethares、 2005）。

そこで、人の感性に基づいた不快度曲線を用いて、整数倍音を 11 まで持っている 2 つの音を同時に鳴らした時の不協和度をコンピュータで計算してグラフに描いたのが付録 3 図 5 です。細かいところは見えにくいかもしれませんが、横軸が 1 から始まっており、2 つの音の片方の音［前の例では（A）の音］に対する比をあらわしています。このグラフでは（B）を（A）の 5 倍上まで移動したときの計算結果を示しています。2 つ目の音［(B）の音］を少しずつ上げて（A）から離していくと、すぐに不協和度は上がります。しかしその後所々で、鋭く落ち込む谷が見えます。谷というのは上でも述べたように不協和度が低い、つまり協和しているということです。たとえば、1.5 のところと 2.0 のところに鋭い谷が見えますが、1.5 はソを表し、2.0 は 1 オクターブ高いドの音を示しています。ヘルムホルツの本では 1.5 倍のソと 1 オクターブ上のドで、不協和度が共に 0 になる図が書いていありますが、Promp と Levert（1965）の作った式で計算すると、1.5 倍のソの不協和度は完全には 0 にはなりません。このグラフをみると、その他にも小さな谷が見えます。これらをまとめたものを次の付録 3 表 1 に示しました。

３　音階と不協和度曲線の関係

付録 3 表 1 では、谷を示すところの比が 26 個あげられています。その右に各比に最も近い純正律と平均律の比を載せました。最後の列には音階名を載せました。これを見るとド#以外のすべての音階が不協和度曲線の谷の比を抜き出すだけで出てくることがわかります。つまり、ある音についてそれに伴う整数倍音列を考慮に入れて不協和度曲線を作ると、不協和度の低い谷の比を抜き出すだけで、ほぼドレミの音階のすべてが自動的に求まるということです。

付録３　表１　付録３図５の不協和度曲線の谷の比率に対応する平均律と純正律の比率と音階

番号	谷比率	純正律	平均律	音階
1	1.000	1.000	1.000	ド
2	1.125	1.125	1.122	レ
3	1.200	1.200	1.189	レ＃
4	1.250	1.250	1.260	ミ
5	1.333	1.333	1.335	ファ
6	1.400	1.406	1.414	ファ＃
7	1.500	1.500	1.498	ソ
8	1.600	1.600	1.587	ソ＃
9	1.667	1.667	1.682	ラ
10	1.750	1.800	1.782	ラ＃
11	1.800	1.800	1.782	ラ＃
12	1.834	1.875	1.888	シ
13	2.000	2.000	2.000	ド
14	2.202	2.250	2.245	レ
15	2.251	2.250	2.245	レ
16	2.333	2.400	2.378	レ＃
17	2.500	2.500	2.520	ミ
18	2.667	2.667	2.670	ファ
19	2.750	2.812	2.828	ファ＃
20	3.000	3.000	2.997	ソ
21	3.334	3.334	3.364	ラ
22	3.500	3.600	3.564	ラ＃
23	3.667	3.750	3.776	シ
24	4.000	4.000	4.000	ド
25	4.500	4.500	4.490	レ
26	5.000	5.000	5.040	ミ

逆に言うと、人類が長い間かかって作った音階は、各音階が基音（この場合ド）と、協和するところに定められている、と言えます。付録 3 表 1 をよく見ると、不協和度曲線の谷間の比は、平均律の比より、純正律の比と一致するものが多いことに気付きます。しかし、和音や転調では純正律に不具合が出てきます。

1 次元の弦の振動にはもともと整数倍音が含まれているので、2 つの音を同時に鳴らすと、各倍音列が互いに干渉しあいます。この 2 つの音を少しずつ離していくと、倍音列がうまく重なって耳障りでないところが出てくる。その耳障りでないところを音階にして音楽を作るので、心地よい音楽が作れるのではないかと思います。つまりこのようにしてできた音階の音を組み合わせて旋律や和音を作って音楽を作ると、人の心に美しく響くのではないでしょうか。ドレミの音階は長い年月をかけてできまし

た。ドレミの音階は整数の倍音列を基に、人の感覚で淘汰され無意識的にできたのかもしれません。これを最も再現しているのが純正律だと思われますが、結局転調の問題が出てきて、平均律が西洋音楽では採用されて普及し、日本にも明治以降に持ち込まれ広まりました。

参考文献

小方厚 （2007） 音律と音階の科学 （ブルーバックス）

Helmholtz, H. （1862） On the Sensations of Tone, （A. J. Ellis 英訳）, Dover Publications, Inc., New York.

Promp, R. and W. J. M. Levelt （1965） Tonal Consonant and Critical Bandwidth, J. Acoust. Soc. Am. 38: 548-560.

Sethares, W. A. （1999） Tuning, Timbre, Spectrum, Scale, Springer.

付録 4

協和度表の作り方

この本では、音階の倍音が互いに協和する程度を示すため、協和度表という表を作り説明に使っています。これを詳しく説明します。

付録 4 表 1 を見てください。

まずドとソだけの協和を見る方法を表（ア）にしました。

ドの音高を基準値として 1.000 とすると、純正律ではソの振動数はその 1.5 倍なので、1.500 となります。オクターブ上のドは振動数でちょうど 2 倍ですので 2.000 です。

最初のドの音の整数倍音を右に並べています。2、3 倍と整数倍なので、第 3 倍音までは 2.000、3.000 という数字になります。さて、ソはドのもともと 1.5 倍の高さの音なので、その音を 1.500 と表します。ソの２倍音は 1.500 の 2 倍なので 3.000、3 倍音は 4.500 です。その数字が（ア）の 2 段目に並んでいます。3 列目はオクターブ上のドなので、第 1 倍音（基音）は 2.000 で２倍音は、4.000、３倍音は 6.000 となります。この表は、倍音と音階の音高を比で入れた表計算ソフトで簡単に作れます。

（ア）

音階	第1倍音	第2倍音	第3倍音
ド	1.000	2.000	3.000
ソ	1.500	3.000	4.500
ド	2.000	4.000	6.000

（イ）

音階	第1倍音	第2倍音	第3倍音	第4倍音	第5倍音	第6倍音
ド	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
ミ	1.250	2.500	3.750	5.000	6.250	7.500
ソ	1.500	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000

（ウ）

音階	第1倍音	第2倍音	第3倍音	第4倍音	第5倍音	第6倍音	第7倍音	第8倍音	第9倍音
ド	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000
レ	1.125	2.250	3.375	4.500	5.625	6.750	7.875	9.000	10.125
ミ	1.250	2.500	3.750	5.000	6.250	7.500	8.750	10.000	11.250
ファ	1.333	2.667	4.000	5.333	6.667	8.000	9.333	10.667	12.000
ソ	1.500	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000	13.500
ラ	1.667	3.333	5.000	6.667	8.333	10.000	11.667	13.333	15.000
シ	1.875	3.750	5.625	7.500	9.375	11.250	13.125	15.000	16.875
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	18.000

付録４　表1　純正律での協和表の考え方
（ア）、ド、ソ、ドでの協和表；（イ）、ド、ミ、ソ、ドの協和表；（ウ）、ドレミの音階での協和表。
（ア）と（イ）では同じ音階の間では同じ色調を使った。（ウ）では、少し純正律の比率から外れる数字を白抜きにした。

さてこの表全体を見ると、同じ数字があることに気づきます。たとえば、最初のドの 2 倍音と 1 オクターブ上のドの基音（1 倍音）です。それだけではなく、最初のドの 3 倍音はソの 2 倍音と同じ数字（3.000）です。そこでドとソは協和するといえます。

表 1 の（イ）を見てください。この表では、（ア）の表にミを加えました。ミの音は純正律でいうとドの 1.250 倍です。ミを入れると、その 4 倍音は 5.000 となります。これは、最初のドの第 5 倍音（5.000）と同じ数字です。つまりドの 5 倍音とミの 4 倍音は協和します。それだけではなく、ミの 6 倍音（7.500）はソの第 5 倍音（7.500）と同じ数字となり、これらも互いに協和します。

表 1 の（ウ）ではドレミファソラシドの音階すべてについて表を作ってみました。この表でグレーの色についているものは、ほかのどこかに同じ数字があることを示しています。ここで、黒の背景で白抜きの数字に注目してください。ファの第 7 倍音とシの第 5 倍音です。この数字は 9.333 と 9.375 です。両者はわずかですが違います。その差は比でいうと 0.45％です。平均律で言う半音は、元の音との差が 5.95％でした。ですから 0.45％の音の違いは、半音の 10 分の 1 以下です。それで、この違いは許せる範囲として協和すると判断しました。この本ではその許容範囲は半音の 4 分の 1 以内、すなわち 1.487%以下としています。

閾値を 1.487％（半音の 1／4）にしたひとつの理由は、モーツアルトの逸話によっています（ルシェバリエ　2011）。モーツアルトは 1／4 半音を絶対音階で聞き分けられたといわれています。つまり、1／4 半音は人の耳に識別できる最小の単位と考えてもよいと思われます。

音階	第1倍音	第2倍音	第3倍音	第4倍音	第5倍音	第6倍音	第7倍音	第8倍音	第9倍音	一致数（第2倍音～第9倍音）
ド	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	7
レ	1.125	2.250	3.375	4.500	5.625	6.750	7.875	9.000	10.125	3
ミ	1.250	2.500	3.750	5.000	6.250	7.500	8.750	10.000	11.250	5
ファ	1.333	2.667	4.000	5.333	6.667	8.000	9.333	10.667	12.000	5
ソ	1.500	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000	13.500	6
ラ	1.667	3.333	5.000	6.667	8.333	10.000	11.667	13.333	15.000	4
シ	1.875	3.750	5.625	7.500	9.375	11.250	13.125	15.000	16.875	6
ド	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	18.000	5
									合計	41
									割合（%）	64.1

付録４　表2　ドレミの音階（純正律）の協和度の計算
　付録4 表1（ウ）の第2倍音から第9倍音までの協和度表を再掲している。右の列に一致数をまとめた。ドの倍音は7倍音を除き、2～9までどれかの音階のどれかの倍音と一致している。そこでこの位置数を7とした。この一致数をその他の音階についても合計すると41個になる。音階はドからドまで8個あり倍音2から9までは8個あるので、この表で第1倍音を除けば枠が64個のある。そのうち41個がどれかと協和しているので、協和する割合は（40／64）×100%=64.1%となる。これを協和度と定めた。

付録４表２は表１（ウ）からの協和度の求め方を示すために再掲しました。使った音階は純正律です。灰色あるいは黒色の枠がそれぞれの音階について、第２倍音から第９倍音まで 41 枠あります。もともとその中には 64 個（8 音階×8 倍音）の枠があり、そのうち 41 個の枠がどれかと協和して色がつけられているので、協和する割合が計算できます。それは、(41／64) ×100 (%) ＝64.1%です。平均律の協和度 (86%) に比べると、だいぶ下がります。

協和度は、どれだけ倍音を使うかによってまた、どこまで音階を使うかによって変わりますので、比較する場合は倍音と音階の数をそろえておく必要があります。

付録１の和音でも述べましたが、和声学がラモーによって提唱され、それをダランベールが科学的に説明しようとした試みがありました。しかし、ピアノの鍵盤にとらわれて、音程を長３度、５度、長７度など表記したことにより、音高を表す振動数から離れて議論したことが混乱を招いたような気がします。ラモーやダランベールが現在の表計算を使っていたら、もっとすっきりしたかもしれません。

参考文献

ルシェバリエ、B. （2011） モーツアルトの脳、（藤野邦夫、生駒忍訳）作品社

ジャン・ロン・ダランベール（1752）ラモー氏の原理の基づく音楽理論と実践の基礎（日本語訳、片山千佳子・安川智子・関本菜穂子）春秋社

付録 5

2オクターブのドレミと2循環音階の協和度比較

2オクターブ分の平均律とポリゴノーラ（混合様式）の2循環音階の協和度を下に2つの表で比較しました。両方とも同じ色の音は協和することを示しています。最初に示した平均律の協和度表では7倍音の列の後半が白いですが、これは平均律の特徴です。次ページに示したポリゴノーラの協和度表にはそのような傾向はみられません。

付録5　表1　平均律　2オクターブの協和度

音階番号	倍音									一致数
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	8
2	1.059	2.119	3.178	4.238	5.297	6.357	7.416	8.476	9.535	8
3	1.122	2.245	3.367	4.490	5.612	6.735	7.857	8.980	10.102	8
4	1.189	2.378	3.568	4.757	5.946	7.135	8.324	9.514	10.703	8
5	1.260	2.520	3.780	5.040	6.300	7.560	8.819	10.079	11.339	8
6	1.335	2.670	4.005	5.339	6.674	8.009	9.344	10.679	12.014	8
7	1.414	2.828	4.243	5.657	7.071	8.485	9.899	11.314	12.728	8
8	1.498	2.997	4.495	5.993	7.492	8.990	10.488	11.986	13.485	8
9	1.587	3.175	4.762	6.350	7.937	9.524	11.112	12.699	14.287	8
10	1.682	3.364	5.045	6.727	8.409	10.091	11.773	13.454	15.136	8
11	1.782	3.564	5.345	7.127	8.909	10.691	12.473	14.254	16.036	8
12	1.888	3.775	5.663	7.551	9.439	11.326	13.214	15.102	16.990	8
13	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	18.000	8
14	2.119	4.238	6.357	8.476	10.595	12.714	14.832	16.951	19.070	8
15	2.245	4.490	6.735	8.980	11.225	13.470	15.714	17.959	20.204	8
16	2.378	4.757	7.135	9.514	11.892	14.270	16.649	19.027	21.406	8
17	2.520	5.040	7.560	10.079	12.599	15.119	17.639	20.159	22.679	8
18	2.670	5.339	8.009	10.679	13.348	16.018	18.688	21.357	24.027	8
19	2.828	5.657	8.485	11.314	14.142	16.971	19.799	22.627	25.456	8
20	2.997	5.993	8.990	11.986	14.983	17.980	20.976	23.973	26.970	7
21	3.175	6.350	9.524	12.699	15.874	19.049	22.224	25.398	28.573	7
22	3.364	6.727	10.091	13.454	16.818	20.182	23.545	26.909	30.272	7
23	3.564	7.127	10.691	14.254	17.818	21.382	24.945	28.509	32.072	7
24	3.775	7.551	11.326	15.102	18.877	22.653	26.428	30.204	33.979	6
25	4.000	8.000	12.000	16.000	20.000	24.000	28.000	32.000	36.000	6
							協和度比率			96.00

付録５　表２　ポリゴノーラ（ピザ・ドーナツ混合様式）　２循環音階の協和度

音階番号	倍音									一致数
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1.000	2.216	3.726	5.514	7.574	9.899	12.487	15.334	18.437	8
2	1.182	2.619	4.404	6.518	8.952	11.701	14.760	18.125	21.793	5
3	1.202	2.664	4.479	6.628	9.104	11.899	15.009	18.431	22.161	8
4	1.228	2.721	4.576	6.771	9.301	12.156	15.334	18.830	22.641	7
5	1.261	2.794	4.698	6.953	9.551	12.483	15.746	19.336	23.249	6
6	1.307	2.896	4.870	7.207	9.899	12.938	16.321	20.042	24.097	7
7	1.373	3.043	5.116	7.571	10.399	13.591	17.145	21.054	25.314	6
8	1.479	3.277	5.511	8.155	11.202	14.641	18.468	22.679	27.268	8
9	1.549	3.433	5.772	8.541	11.732	15.334	19.342	23.752	28.559	7
10	1.681	3.725	6.263	9.269	12.732	16.640	20.991	25.776	30.993	8
11	1.795	3.978	6.688	9.898	13.595	17.769	22.414	27.525	33.094	7
12	1.861	4.124	6.934	10.262	14.095	18.422	23.238	28.537	34.311	7
13	2.031	4.501	7.568	11.199	15.383	20.105	25.361	31.143	37.446	8
14	2.216	4.911	8.257	12.219	16.784	21.936	27.671	33.980	40.856	8
15	2.619	5.804	9.760	14.443	19.839	25.929	32.707	40.165	48.292	7
16	2.664	5.903	9.925	14.687	20.174	26.367	33.261	40.844	49.109	7
17	2.721	6.030	10.139	15.005	20.611	26.938	33.980	41.728	50.172	6
18	2.794	6.192	10.412	15.408	21.165	27.662	34.893	42.849	51.520	7
19	2.896	6.418	10.792	15.970	21.937	28.671	36.166	44.412	53.399	6
20	3.043	6.742	11.337	16.777	23.044	30.118	37.993	46.655	56.096	8
21	3.277	7.263	12.212	18.072	24.824	32.444	40.926	50.257	60.427	8
22	3.433	7.607	12.790	18.927	25.998	33.979	42.863	52.635	63.287	8
23	3.725	8.255	13.880	20.540	28.214	36.875	46.515	57.121	68.680	6
24	3.978	8.815	14.821	21.933	30.127	39.375	49.670	60.994	73.337	5
25	4.124	9.139	15.366	22.740	31.235	40.823	51.496	63.237	76.034	8
26	4.501	9.974	16.770	24.817	34.088	44.552	56.200	69.014	82.979	7
27	4.911	10.882	18.297	27.077	37.193	48.611	61.319	75.300	90.538	7
								協和度比率		87.96

協和度を平均律の２オクターブ分で計算すると 96.00％でした。円盤ポリゴノーラの混合様式で作った２循環音階分の協和度は、87.96％で、ほとんど遜色がありませんでした。

このことから、協和度という点だけを見れば、平均律の音階も、ポリゴノーラの音階もよく協和する音階であるといえます。

付録 6

ポリゴノーラの設計（円盤）

青銅の円盤では、262 Hz の基音（0　1）を出すには、厚さが 2㎜ の場合、直径が約 22cm 位と計算されます。実際に計算に基づいて作った円盤をたたいて音を分析し、目標とした振動数と比較しました（付録6　表 1)。音階番号 1 の場合、目標振動数の値は 262 Hz でしたが、実際にたたいて出た音を分析すると 283 Hz でした。このように製作した円盤の振動数は目標値よりも全体的に少し高くなりました。そのずれの平均値は＋6.9％です。しかし、円盤と円盤の音の高さの比すなわち音階比では、目標値と平均で 1.1％しかずれていません。例えば、音階番号 1 と 2 の比は 1.16 ですが、実測した値から計算した比は 1.15 です。

実測した振動数が目標とした音階比よりも高めにずれたのは、上の計算式で用いたλやσの値が真の値と少しずれていたためと考えられます。相対的な音高の比は大体 1％の精度で制作できています。この値は、12 平均律の半音 5.96％の 1／4 以下なので、モーツアルトでも気が付かないかもしれません。

なお、この表 1 で音階番号 1～7 までは円盤の厚さは 2.0㎜、音階番号 8～14 では 1.5㎜、音階番号 15～22 までは 1.0㎜ です。これで低い音の円盤と高い音の円盤の厚さと直径の比が大きく異ならないようにしています。厚さの異なる円盤を設計しても、本文中の式を使う限りは目標値に良く近づいた円盤ができるといえます。

音階	目標	実測	周波数の	目標	実測	音階比率の	
番号	周波数	周波数	ずれ(%)	音階比率	音階比率	ずれ（%）	直径（mm）
1	262	283	8.0	1.00	1.00	0.0	218.3
2	304	325	6.9	1.16	1.15	1.0	202.6
3	343	389	13.3	1.31	1.37	−4.7	190.7
4	362	401	10.9	1.38	1.42	−2.6	185.8
5	390	410	5.0	1.49	1.45	2.8	178.8
6	445	474	6.4	1.70	1.67	1.5	167.4
7	474	517	9.0	1.81	1.83	−0.9	162.2
8	506	538	6.4	1.93	1.90	1.5	136.1
9	542	581	7.1	2.07	2.05	0.8	131.4
10	590	623	5.7	2.25	2.20	2.2	126.0
11	684	730	6.8	2.61	2.58	1.2	117.0
12	772	815	5.5	2.95	2.88	2.3	110.1
13	814	879	8.1	3.11	3.11	0.0	107.3
14	878	943	7.4	3.35	3.33	0.6	103.2
15	1002	1092	9.0	3.83	3.86	−0.9	78.9
16	1067	1114	4.4	4.07	3.94	3.5	76.5
17	1138	1199	5.4	4.34	4.24	2.5	74.1
18	1220	1284	5.2	4.66	4.54	2.7	71.5
19	1326	1391	4.9	5.06	4.92	3.0	68.6
20	1538	1625	5.7	5.87	5.74	2.2	63.7
21	1737	1817	4.6	6.63	6.42	3.2	59.9
22	1829	1924	5.2	6.98	6.80	2.7	58.4
		平均	6.9		平均	1.1	

付録6 表1　目標周波数を決めて円盤を設計したときの実測値とのずれ
番号1～7までは、厚さ2.0ミリ。8～14は1.5ミリ、15～22は1.0ミリです。

付録 7

不協和度曲線に頼らず協和する音階を作る方法

付録2にヘルムホルツの不協和度の説明をしましたが、大変複雑な式を使わねばなりません。ところが、結果的に同じ音階を簡単に作ることが表計算ソフトでできます。音源物体（音を発する物体、弦とか、円板とか）の共鳴周波数（倍音とか部分音とよばれる）の並び方を使う方法です。この並び方を使うだけで、音階ができます。この場合、音階とは互いに共鳴周波数（高次部分音）がどこかで符合（協和）する音高の組み合わせのできる音高の集団、と定義します。

例えば、弦を例にとり説明します。弦の部分音は、整数倍音です。すなわち、基音（1倍音）に対して2倍音、3倍音、4倍音と続きます。ピアノを弾くと大体13倍音まで出ています。5倍音までを表にすると、次のようになります。

	（基音）	高次倍音			
	1倍音	2倍音	３倍音	４倍音	5倍音
音高比	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000

ところでよく知られているように、基音をドとするとピタゴラスはソを作るのに、基音の音高の3／2倍の音を採用しました。弦を2つの駒に張り、その長さを1／3にするために新たに駒を差し込みます。すると、左右に、元の長さの1／3と2／3の長さの新しい弦の長さができます。そこで1／3の弦をはじくと、駒を入れない時の3倍高い音がしました。また2／3長さになった弦を弾くと1.5倍高い音がしました。これは3／2倍高い音です。このようにしながら、順に1.5倍高い音を作りその音を2で割りながら1オクターブ（2.000）の中に入れて音階を作りました。このようにしてピタゴラス音階が作られたのですが、1オクターブ上のドが、元のドの丁度2.000倍にならない欠点がありました。1オクターブ上の音、つまり元の1／2の弦長の音が新しいドになるように作られたのが純正調（純正律）と呼ばれる音階です。この音

付録7　表1　弦の長さと音の高さ								
音名	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
弦の長さ	1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2
音の高さ	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

階を音高比で表すと、分数で表せます（付録 7 表 1)。

　ドが元の長さの弦をはじいた時の音高で、弦の長さを 8／9 にするとレができて、弦の長さを 4／5 にするとミができます。ドレミの音高を、すべて分数で表します。この分数の上下、すなわち分母も分子も整数（小数点がつかない数字）です。これは、弦が整数倍音しか出さないことに由来しています。この関係を表計算ソフトで作ると表 2 のようになります。

上の表は、分子と分母を 9 まで取り、その数字を表にしたものです。すると、表の左下半分には太字で示した、3／2（ソ）、4／3（ファ）、5／3（ラ）、5／4（ミ）、9／8（レ）が現れ、右上半分にはそれらの音高を与える弦長（斜体字）が現れます（斜体字)。シの音高を表す、15／8 はこの表には現れませんが、分子分母を 15 まで広げれば出てくる数字です。

		分母								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
分子	1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
	2	2/1	2/2	*2/3*	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9
	3	3/1	**3/2**	3/3	*3/4*	*3/5*	3/6	3/7	3/8	3/9
	4	4/1	4/2	**4/3**	4/4	*4/5*	4/6	4/7	4/8	4/9
	5	5/1	5/2	**5/3**	**5/4**	5/5	5/6	5/7	5/8	5/9
	6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	6/9
	7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	7/9
	8	8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	*8/9*
	9	9/1	9/2	9/3	9/4	9/5	9/6	9/7	**9/8**	9/9

	分母	
分子	音高	弦長

付録7　表2　分数で自動的に生じる純正律の音高と弦長
　　下の小さの表は、音高と弦長の分数の配置場所を示している。

		分母				
		1	1.3	1.6	1.9	2.2
分子	1	1.000	0.769	0.625	0.526	0.455
	1.3	1.300	1.000	0.813	0.684	0.591
	1.6	1.600	1.231	1.000	0.842	0.727
	1.9	1.900	1.462	1.188	1.000	0.864
	2.2	2.200	1.692	1.375	1.158	1.000

付録7　表3　倍音が1.3,1.6,1.9,2.2倍の場合の表

さて、2次元物体のポリゴノーラの部分音は、整数で表せません。小数点の付いた数字で表せます。例えば簡単のために、基音（1.000）に対して1.300、1.600、1.900、2.200倍の倍音がでる場合を考えてみましょう。これらの数字を分子や分母にして表を作ると表3のようになります。

表3の左下半分が音高を表すので、これを小さい順に並べると次の表4の左の欄のようになります。数字の並びが、音階を示す音高の並びです。

右の欄は、同じ倍音列を用いて付録2で説明したヘルムホルツの理論式に従って計算した音階です。この2つの音高の並びは、ほとんど一致します。

これから言えることは、非整数倍の部分音を出す物体から出る音から音階をつくる場合は、弦の純正律音階を作るときの理論（分数）と同じ方法で良いということです。つまり、むつかしい式を使わなくても、物体の出す非整数倍音がわかれば、互いに協和する音階が、表計算ソフトで出せるという事です。表3は表計算そのものです。また、表4は表計算ソフトの昇順機能を使うと瞬時にできます。

分数計算	不協和度計算
1.000	1.000
1.158	1.158
1.188	1.187
1.231	1.230
1.300	1.300
1.375	1.375
1.462	1.461
1.600	1.600
1.692	1.692
1.900	1.900
2.200	2.200

付録7表4　分数と不協和度計算で求めた音階の比較

あとがき

私は、植物の形や硬さを担う細胞壁の研究をしていました。細胞壁の物理、化学、分子生物学的研究が専門です。私事で恐縮ですが、1992 年、トマトの硬さを正確に測る研究をアメリカで 1 年間しました。トマトジュースや、トマトピュレなどを工場で製造するとき、未熟なトマトと熟したトマトでは、加える水の量が異なるそうです。そこで、工場に搬入されてくるトマトの熟度を科学的に評価する必要がありました。

私はトマトを縦に半分に切って針を刺し、その抵抗力を測定してトマトの硬さ（熟度）を正確に測定する方法（応力緩和法）を考案しました。この研究は有名な雑誌に 2 つ論文として掲載され、意気揚々と日本に帰国しました。

帰国してすぐ、母に尋ねられました。

「アメリカに行って何を研究してきたの？」

難しいことをいってもわからないと思い、

「トマトを切って、針を刺してトマトの硬さを調べてきた」

というと、

「なんというしょうもないことをしてきたのか。そんなことは毎日トマトを切っている世界中のお母さんが知っている。そんな研究は税金の無駄だ」

といわれました。

“この測定には応力緩和法というすばらしい方法を使っている”、とか“税金といってもアメリカの税金なのに”、と言いたい言葉をぐっとこらえて、“よし、トマトの硬さを切らず測る方法を生みだしてやる”と固く心に誓いました。

しかし、切らずにトマトの硬さを計るよい方法がすぐにわからず、“音をトマトに与えてその反応をみればなんとかなるのでは”と思い、スピーカーをトマトにあてて、マイクでその音を拾い研究を重ねました。トマトを通る音速が、熟してくるとなんとなく遅くなることが分かりましたが、精度が上がりません。2 年研究してもうまくいかず、「もうやめよう」と思い、京都で開かれた国際学会（1994 年）で最後の発表をしました。その会場である企業の方が「櫻井さんがほしい情報は音ではなく、振動で

はないのですか？」といわれました。その方が紹介してくれた振動を正確に測る方法で、トマトの硬さを切らずに測ることができるようになりました。このようにして果実の熟度を非破壊で評価するために共振を使う方法が確立しました。

共振法でいろいろな果実を測る研究が進みました。果実の硬さは熟度をあらわします。なぜなら未熟な果実は硬く、過熟な果実は軟らかく腐ります。これは一方通行で腐った果実が硬くなることはありません。硬さを測れば熟度が分かる理由です。硬度を測れば、切らずに熟度が分かるので、後どれくらい待てば食べごろになるかをあてることもできるようになりました。

本文でも述べましたように、スイカ名人にも会うことができました。そのとき名人は、たたいて出てくるスイカの音をどのように判断しているのだろうと思い、スイカの音に興味を持つようになりました。音が出るということはスイカが振動をしているということです。

その音から、3 次元（球体)、2 次元（平面）の音階ができたことは本文で述べました。これらの音階は私たちに馴染みのある音階ではありません。

名人がスイカの音を聞き分け、若い人にはそれがどうしても分かりません。それは、若い人の耳が「整数倍音」の音楽に慣らされている宿命かもしれません。「非整数倍音」を愛でる邦楽に親しんでいた高齢の人がスイカの出す音が聞き分けられるのでしょうか。

私は小さいころからヴァイオリンを、高校からはクラシックギターをしていました。ギターでは弦を弾く位置を変えると音色が変わることに以前から気づいていました。それが倍音の出方による、ということを知り倍音に興味を持ちました。もし私がピアノをしていたら、ポリゴノーラは生まれなかったかもしれません。

現在は膨大なデータを学習した AI で作曲できるようになりました。しかし、AI に 2 次元の音階が作れるでしょうか？　将来は作れるようになるかもしれません。でも、その時はまた AI にできないことに人は挑戦するでしょう。

最後にお世話になった多くの方々にお礼の言葉を捧げたいと思います。本の原稿を終始ていねいに読んでいただいた渡辺譲様、山本良一様、黒田華織様、作図の補助で

は麻尾佐三江様、原図では麻尾悠太様、構成については櫻井元希様、楽曲分析では吉海久美子様、3 次元から 2 次元の音階への示唆には小方厚様、2 次元の振動計算では秋元秀美様、特許申請では寺﨑章二様、スチールパンでは製作者・園部良様、ゴングでは柳沢英輔様、ポリゴノーラ楽器の製作では熊代誠一様、ポリゴノーラの紹介では小沼純一様、またコンサートでお世話になった、作曲家・一ノ瀬トニカ様、マリンバ奏者・神田佳子様、稲野珠緒様、琵琶奏者・塩高和之様、現代音楽家・鈴木昭男様、尺八奏者・田中黎山様、志村哲様、ポリゴノーラ演奏では音楽家・灰野敬二様、シンポジウムでお世話になった横谷香織様、新井真由美様の皆様にお礼申し上げます。また最初に果実の熟度を見るには「重要なのは音ではなく振動である」と教えていただいた和田直樹様に感謝いたします。最後に、新しい音階と楽器から新しい音楽が生まれるのではと、いろいろな角度から終始励ましていただいた声明家・桜井真樹子様にこの場を借りて深く感謝いたします。

2023 年 6 月 3 日　櫻井直樹

≪著者略歴≫

櫻井直樹

1950 年　大阪府河内市(現東大阪市)生

1973 年　大阪市立大学理学部卒業

1978 年　大阪市立大学大学院理学研究科博士課程修了(理学博士)

1978 年　日本学術振興会特別研究員

1980 年　アメリカアイオワ州立大学研究員

1980 年　広島大学総合科学部助手

1988 年　同上助教授

1990 年　日本植物学会奨励賞受賞

1991 年　カリフォルニア大学デービス分校研究員(～1992 年)

1993 年　広島大学総合科学部教授

2008 年　チェコ農科大学名誉教授

2011 年　園芸学会賞受賞

2016 年　広島大学統合生命科学研究科特任教授

［表紙デザイン　吉田健嗣］